Técnicas de recuento. Combinatoria

Selección de una muestra a partir de un conjunto dado de objetos

En general dado un conjunto de n objetos $a_1, a_2, \ldots., a_n$, de los cuales seleccionamos r, debemos determinar dos condiciones:

1ª ¿Es necesario tener en cuenta el orden de los elementos para distinguir dos muestras?

2ª ¿Podemos repetir los elementos? es decir, ¿Es un muestreo con o sin reemplazamiento?

- Selección (muestra)
  - Ordenada
    - Sin reemplazamiento $V_{n,r}$
    - Con reemplazamiento $VR_{n,r}$
  - No ordenada
    - Sin reemplazamiento $C_{n,r}$
    - Con reemplazamiento $CR_{n,r}$

Permutaciones. Variaciones

Regla del producto: Si un procedimiento se puede separar en dos etapas, la primera y la segunda, y tenemos m posibles resultados para la primera etapa y n posibles resultados para la segunda, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden designado de mn maneras.

Ejemplo 1

¿Cuántos menús distintos podemos pedir en un restaurante que tiene cuatro platos de primero y tres platos de segundo?

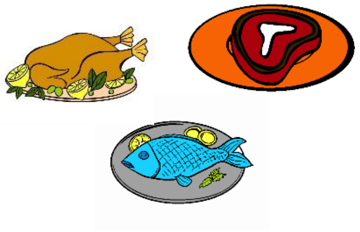
4 primeros x 3 segundos = 12 menús diferentes

Permutaciones. Variaciones

Regla del producto: Si un procedimiento se puede separar en dos etapas, la primera y la segunda, y tenemos m posibles resultados para la primera etapa y n posibles resultados para la segunda, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden designado de mn maneras.

Ejemplo 2

¿Cuántos menús distintos podemos pedir en un restaurante que tiene cuatro platos de primero, tres platos de segundo y tres postres?



4 primeros x 3 segundos x 3 postres = 36 menús

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 3

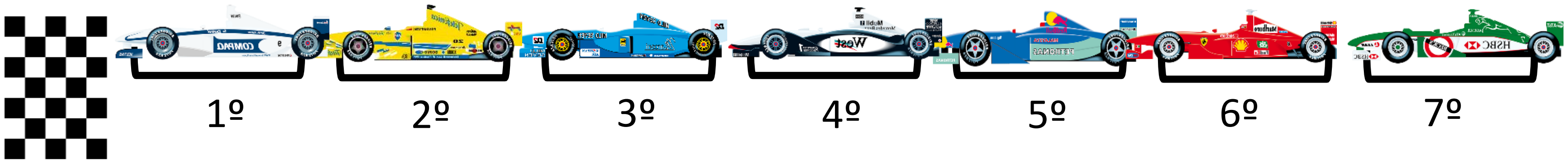
En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede confeccionarse la parrilla de salida?

1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 3

En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede confeccionarse la parrilla de salida?



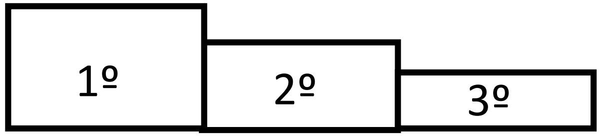
7 posibilidades × 6 posibilidades × 5 posibilidades × 4 posibilidades × 3 posibilidades × 2 posibilidades × 1 posibilidades

= 5040 parrillas de salida distintas

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 4

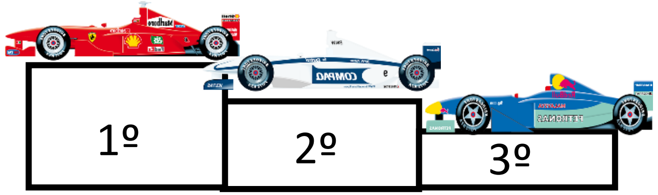
En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede resultar el podio?



Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 4

En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede resultar el podio?



7 posibilidades × 6 posibilidades × 5 posibilidades

= 210 podios diferentes

Permutaciones. Variaciones

Definición

Para un entero $n \geq 0$, n factorial, expresado $n!$, se define por

$$0! = 1$$
$$n! = n(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \text{para } n \geq 1.$$

Ejemplo 5

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

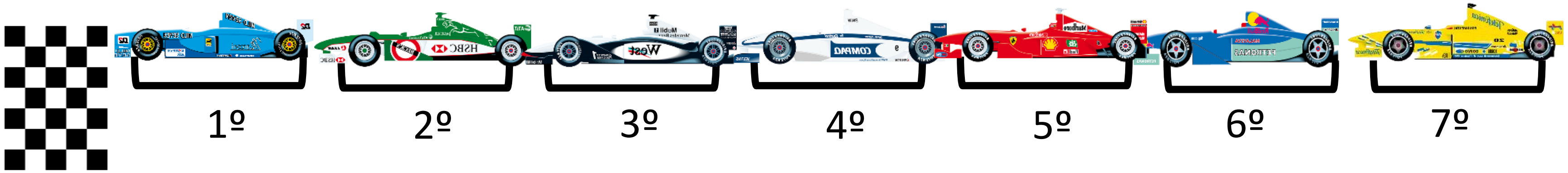
$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 3

En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede confeccionarse la parrilla de salida?



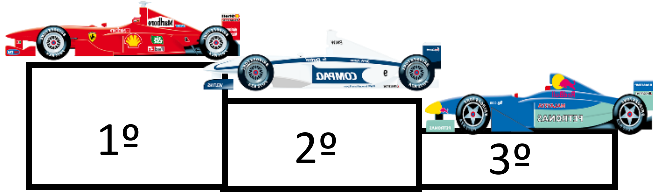
7 posibilidades × 6 posibilidades × 5 posibilidades × 4 posibilidades × 3 posibilidades × 2 posibilidades × 1 posibilidades

= 5040 parrillas de salida distintas $= 7!$

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 4

En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede resultar el podio?



7 posibilidades $\times$ 6 posibilidades $\times$ 5 posibilidades

= 210 podios diferentes $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{7!}{4!}$

Permutaciones. Variaciones

Definición

Dada una colección de n objetos, cualquier disposición de ellos se denomina <u>permutación</u> de la colección.

Ejemplo 6

C A M I N O

A I N C O M

O A I N M C ...

Permutaciones. Variaciones

Definición

Dada una colección de n objetos, cualquier disposición de ellos se denomina permutación de la colección.

Ejemplo 6

C I M O N A

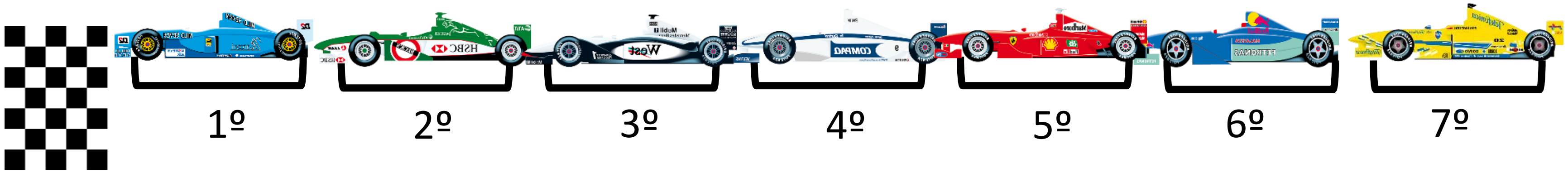
En general dado un conjunto de n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distintos, por la regla del producto el número de disposiciones o permutaciones para estos n objetos es $n!$

$$P_n = n!$$

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 3

En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede confeccionarse la parrilla de salida?



7 posibilidades × 6 posibilidades × 5 posibilidades × 4 posibilidades × 3 posibilidades × 2 posibilidades × 1 posibilidades

= 5040 parrillas de salida distintas $= 7!$ $\boxed{= P_7}$

Permutaciones. Variaciones

Definición

Dada una colección de n objetos $a_1, a_2, \dots, a_n$, y r un entero con $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de disposiciones o permutaciones de tamaño r para n objetos es

$$\underset{\substack{1^{\text{a}} \\ \text{posic.}}}{n} \times \underset{\substack{2^{\text{a}} \\ \text{posic.}}}{(n-1)} \times \underset{\substack{3^{\text{a}} \\ \text{posic.}}}{(n-2)} \times \underset{\cdots}{\cdots} \times \underset{\substack{r \\ \text{-ésima posic.}}}{(n-r+1)} =$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

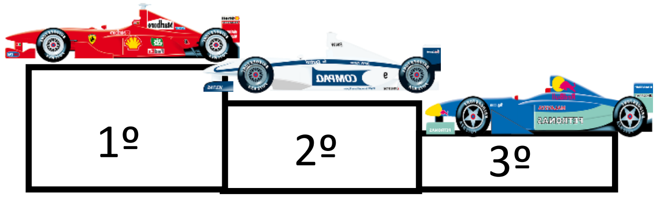
$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\boxed{V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Permutaciones. Variaciones

Ejemplo 4

En un gran premio de Fórmula 1 con 7 pilotos, ¿de cuántas formas distintas puede resultar el podio?



7 posibilidades $\times$ 6 posibilidades $\times$ 5 posibilidades

= 210 podios diferentes $= \dfrac{7!}{4!}$ $\boxed{= V_{7,3}}$